Esquema matemático y notación

- El estado de un sistema cuántico debe ser representado por un vector.

Ya conocen cosas como esto como la polarización de la luz.

von Neumann: Si quieres una teoría física con observables, probabilidades y superposición coherentes, entonces los estados deben representarse en un espacio de Hilbert y los observables como operadores lineales autoadjuntos.

- La dimensión del vector depende del sistema en cuestión:
  - 1 qubit : 2 dimensiones
  - Partícula en movimiento: dim infinita!

(numerable o no numerable)
estados de E $|n\rangle$, $|\vec{x}\rangle$ $|\vec{p}\rangle$

Espacio de Hilbert

usamos $\mathbb{C}$

- Espacio vectorial (Conjunto de vectores, campo, suma de vectores, producto por escalar)
- Producto interior (punto) $(\square, \square) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$
  - $(y, x) = (x, y)^*$
  - $(x, x) > 0$, $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$
  - Lineal respecto a la segunda entrada y anti-lineal respecto a la primera.
- Espacio métrico completo (respecto a la norma del producto punto) (i.e. toda sucesión de Cauchy converge)

¿Por qué usamos $\mathbb{C}$?

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t)$$

$\rho = |\psi|$

Podríamos usar $\psi(\vec{r},t) = u(\vec{r},t) + v(\vec{r},t)$ o $\psi(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t) e^{i\theta(\vec{r},t)}$

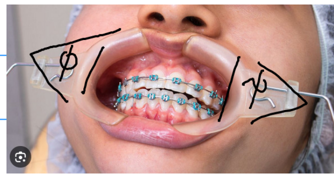
pero la representación compleja es más sencilla.

El producto interior entre elementos de $\mathcal{H}$ tiene la forma

$\langle \quad \rangle$

Brackets

$\underbrace{\langle \alpha |}_{\text{Bra}} - \underbrace{| \beta \rangle}_{\text{Ket}}$



"Kets" = vectores

$|\psi\rangle$ es como $\vec{\psi}$

Kets

- Un vector en MC se denota por $|\text{etiqueta}\rangle$. La etiqueta puede ser cualquier cosa, a veces hasta dibujos.
- Podemos sumar dos kets $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle$ y obtener otro ket.
- Producto por escalar $c\,|\alpha\rangle = |\alpha\rangle\, c$
- Físicamente $c\,|\alpha\rangle$ y $|\alpha\rangle$ van a representar el mismo estado. Lo que nos importa es la dirección (rayos).
- Los kets representan vectores columna.
- en relatividad esto es un vector con un índice abajo.

El producto interior $(|\beta\rangle, |\alpha\rangle) = \langle \beta | \alpha \rangle$

$= \underbrace{\langle \beta | \cdot | \alpha \rangle}_{\text{no se usa}}$

Propiedades del producto interior:

$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^*$ $\quad (|\alpha\rangle, |\beta\rangle) = (|\beta\rangle, |\alpha\rangle)^*$

$\therefore \langle \alpha | \alpha \rangle \in \mathbb{R}$

$(\langle \alpha | + \langle \beta |)\, |\gamma\rangle = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle, |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle, |\gamma\rangle) + (|\beta\rangle, |\gamma\rangle)$

$= \langle \alpha | \gamma \rangle + \langle \beta | \gamma \rangle$

Análogo $\langle \alpha | (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = \langle \alpha | \beta \rangle + \langle \alpha | \gamma \rangle$

Para $c \in \mathbb{C}$

$(c|\beta\rangle, |\alpha\rangle) = c^* \langle \beta | \alpha \rangle$ antilineal

$(|\beta\rangle, c|\alpha\rangle) = c \langle \beta | \alpha \rangle$ lineal

Def.

$|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son ORTOGONALES si $\langle \alpha | \beta \rangle = 0$

La norma de un ket $|\alpha\rangle$ es

$\| |\alpha\rangle \| = \sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}$

Bras: un espacio vectorial dual (complementario) al espacio de Kets

Los bras van a ser importantes pues si tenemos un estado $|\psi\rangle$ y buscamos una funcion que nos de un valor de prediccion $f: \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ eso es un funcional lineal.

Definición matemática de Espacio Dual:

- Si consideramos un funcional lineal χ (i.e. una función que va del espacio de vectores $\mathcal{H}$ a los complejos.

$$|\alpha\rangle \in \mathcal{H} \xrightarrow{\chi} \text{número complejo } \chi(|\alpha\rangle)$$
$$\chi(a\,|\alpha\rangle + b\,|\beta\rangle) = a\chi(|\alpha\rangle) + b\chi(|\beta\rangle)$$

- ~~Ojo! Un funcional lineal no es un operador.~~
- el conjunto de todos los funcionales lineales χ definidos sobre $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial y es el dual de $\mathcal{H}$.
- $\cancel{\chi(|\alpha\rangle) = \langle\chi|\alpha\rangle}$ (esto va al final)
- La existencia de un producto escalar nos permite haccer la correspondencia $|\alpha\rangle \leftrightarrow \langle\alpha|$. Teniendo un ket $|\psi\rangle$ su correspondiente bra es el asociado al funcional lineal $\psi(|\alpha\rangle) = (|\psi\rangle\,, |\alpha\rangle) = \langle\psi|\alpha\rangle$

Para un $|\psi\rangle$ cualquiera, ¿Qué debo poner en "$\boxed{?}\,|\psi\rangle$" para que sea $(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle, |\psi\rangle)$?

- ¿Cuál es el bra asociado a $a\,|\alpha\rangle + b\,|\beta\rangle$?

$$\begin{aligned}(a\,|\alpha\rangle + b\,|\beta\rangle\,, |\gamma\rangle) &= a^*(|\alpha\rangle\,, |\gamma\rangle) + b^*(|\beta\rangle\,, |\gamma\rangle)\\ &= a^*\,\langle\alpha|\gamma\rangle + b^*\,\langle\beta|\gamma\rangle\\ &= (a^*\,\langle\alpha| + b^*\,\langle\beta|)\,|\gamma\rangle\end{aligned}$$

por lo que el bra asociado a $a\,|\alpha\rangle + b\,|\beta\rangle$ es $a^*\,\langle\alpha| + b^*\,\langle\beta|$

El bra asociado a $|\psi\rangle$ que denotamos por $\langle\psi|$ es aquel que para cualquier ket $|\alpha\rangle$ tenemos $\langle\psi|\alpha\rangle = (|\psi\rangle, |\alpha\rangle)$. Aclarar que $\langle\psi| = (|\psi\rangle, \square)$

El razonamiento para definir al espacio dual es que primero uno define al espacio de funcionales lineales y luego uno nota que uno puede ver a cada elemento del dual como un producto punto: para dim finita es porque cada transformación lineal tiene una representación matricial y un funcional queda como vector renglón. En dim infinita esto es el teorema de representación de Reisz

Un funcional lineal $\chi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ es una transformación lineal y por tanto tiene una representación matricial (en dim finita)

$$(\chi_1, \ldots\ldots, \chi_N) \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

producto de matrices queda como producto punto.

Para cada ket hay un bra (en dim infinita el recíproco no es cierto siempre)

la correspondencia entre Bras y kets es 1 a 1 en un espacio de Hilbert como $\mathcal{L}^2$ pero que a veces nos vamos a salir de $\mathcal{L}^2$ (usando $\delta(x)$ y e^{ikx}) y en esos casos hay que tener cuidado con los duales.

$$|\alpha\rangle \leftrightarrow \langle\alpha| \qquad |\alpha\rangle + |\beta\rangle \leftrightarrow \langle\alpha| + \langle\beta|$$

$$a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle \leftrightarrow a^*\langle\alpha| + b^*\langle\beta|$$

El bra asociado a $a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle$ es

$$(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle, \square) = a^*(|\alpha\rangle, \square) + b^*(|\beta\rangle, \square)$$
$$= a^*\langle\alpha| + b^*\langle\beta|$$

$c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle c$ (los escalares se pueden mover) (y sólo los escalares!)

Un ket se escribe como vector columna y un bra es fila

$$|\alpha\rangle \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \qquad \langle\beta| \sim (\beta_1, \ldots, \beta_N)$$

Operadores

Transformacion lineal

$\hat{A}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

aplicado a — producto

$\hat{A}(|\psi\rangle) = \hat{A}|\psi\rangle$

matriz cuadrada.

en AL aprendemos qe toda T.L. se puede ver como un producto por matriz

- Son importantes porque a cada observable físico (R, P, L, n, J, E..) asociamos un operador.

- $\hat{A}|\psi\rangle$ no es necesariamente paralelo a $|\psi\rangle$; i.e. $\nexists\, c$, $A|\psi\rangle \neq c|\psi\rangle$

- $\hat{A}|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ¿Cuál es su dual? no es $\langle\psi|\hat{A}$ ¿Qué obj. matemático es esto?

Def. → El dual de $\hat{A}|\psi\rangle$ es $\langle\psi|\hat{A}^{+}$

$\hat{A}^{+}$ es el conjugado hermitiano / hermítico

¿Qué relación tienen $\hat{A}$ y $\hat{A}^{+}$?

$$\langle\alpha|\hat{A}|\beta\rangle = \left(|\alpha\rangle, \hat{A}|\beta\rangle\right) = \left(\hat{A}^{+}|\alpha\rangle, |\beta\rangle\right)$$

El conjugado Hermitiano de $\hat{A}$ es el operador que habría que aplicarle a $|\alpha\rangle$ para que el $(\square,\square)$ quede igual.

En tarea $(\hat{A}\hat{B})^{+} = \hat{B}^{+}\hat{A}^{+}$